Решение задачи линейного программирования графическим методом.
Функция достигает наименьшего значения в точке

**Задача:**

Найти наименьшее значение функции

F = 2 x1 + 2 x2

при следующих ограничениях:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  | x1 | + | 2 x2 | ≤ | 8 |
|  | x1 | - | x2 | ≤ | 2 |
|  | x1 | + | 2 x2 | ≥ | 4 |
|  | x1 |  |  | ≥ | 1 |

x1 ≥ 0     x2 ≥ 0

**Решение:**

Точки, координаты которых удовлетворяют одновременно всем неравенствам системы ограничений, называются областью допустимых решений.

Очевидно, для нахождения области допустимых решений данной задачи, необходимо последовательно рассмотреть каждое неравенство. (см. шаг 1 - шаг 4)

Последние два шага служат непосредственно для получения ответа. (см. шаг 5 - шаг 6)

Это стандартная схема решения. Если область допустимых решений представляет собой точку или пустое множество, то решение будет короче.

По условию задачи: x1 ≥ 0     x2 ≥ 0.

Если бы это было единственным условием, то область допустимых решений имела бы вид, как на рисунке (вся первая четверть).

 Большие картинки

**Шаг №1**

Рассмотрим неравенство 1 системы ограничений.

x1 + 2 x2  ≤  8

Построим прямую:   x1 + 2 x2 = 8

Пусть x1 =0 => 2 x2 = 8 => x2 = 4

Пусть x2 =0 => x1 = 8

Найдены коородинаты двух точек (0, 4) и (8 ,0). Соединяем их и получаем необходимую прямую (1).

Нас интересуют точки расположенные выше или ниже построенной прямой (1) ?
Вернемся к исходному неравенству.

x1 + 2 x2  ≤  8

Преобразуем неравенство, оставив в левой части только x2

2 x2  ≤  - x1 + 8

x2  ≤  - 1/2 x1 + 4

Знак неравенства  ≤ . Следовательно, нас интересуют точки расположенные ниже построенной прямой (1).

Объединим данное условие с предыдущим рисунком. В итоге получим область допустимых решений, изображенную на рисунке.

 Большие картинки

**Шаг №2**

Рассмотрим неравенство 2 системы ограничений.

x1 - x2  ≤  2

Построим прямую:   x1 - x2 = 2

Пусть x1 =0 => - x2 = 2 => x2 = -2

Пусть x2 =0 => x1 = 2

Найдены коородинаты двух точек (0, -2) и (2 ,0). Соединяем их и получаем необходимую прямую (2).

Нас интересуют точки расположенные выше или ниже построенной прямой (2) ?
Вернемся к исходному неравенству.

x1 - x2  ≤  2

Преобразуем неравенство, оставив в левой части только x2

- x2  ≤  - x1 + 2

x2  ≥  x1 - 2

Знак неравенства  ≥ . Следовательно, нас интересуют точки расположенные выше построенной прямой (2).

Объединим данное условие с предыдущим рисунком. В итоге получим область допустимых решений, изображенную на рисунке.

 Большие картинки

**Шаг №3**

Рассмотрим неравенство 3 системы ограничений.

x1 + 2 x2  ≥  4

Построим прямую:   x1 + 2 x2 = 4

Пусть x1 =0 => 2 x2 = 4 => x2 = 2

Пусть x2 =0 => x1 = 4

Найдены коородинаты двух точек (0, 2) и (4 ,0). Соединяем их и получаем необходимую прямую (3).

Нас интересуют точки расположенные выше или ниже построенной прямой (3) ?
Вернемся к исходному неравенству.

x1 + 2 x2  ≥  4

Преобразуем неравенство, оставив в левой части только x2

2 x2  ≥  - x1 + 4

x2  ≥  - 1/2 x1 + 2

Знак неравенства  ≥ . Следовательно, нас интересуют точки расположенные выше построенной прямой (3).

Объединим данное условие с предыдущим рисунком. В итоге получим область допустимых решений, изображенную на рисунке.

 Большие картинки

**Шаг №4**

Рассмотрим неравенство 4 системы ограничений.

x1  ≥  1

Построим прямую: x1 = 1

Данная прямая параллельна оси OX2 и проходит через точку (1,0)   (4)

Знак неравенства  ≥ . Следовательно, нас интересуют точки расположенные правее построенной прямой (4).

Объединим данное условие с предыдущим рисунком. В итоге получим область допустимых решений, изображенную на рисунке.

 Большие картинки

**Шаг №5**

Строим вектор C = (2, 2), координатами которого являются коэффициенты функции F.

 Большие картинки

**Шаг №6**

Будем перемещать "красную" прямую, перпендикулярно вектору C, от левого нижнего угла к правому верхнему.

В точке, в которой "красная" прямая в первый раз пересечет область допустимых решений, функция F достигает своего наименьшего значения.

В точке, в которой "красная" прямая в последний раз пересечет область допустимых решений, функция F достигает своего наибольшего значения.

Функция F достигает наименьшего значения в точке A. (см. рисунок)

Найдем координаты точки A.
Точка A одновременно принадлежит прямым (3) и (4).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  | x1 | + | 2 x2 | = | 4 |   =>   | x1 = 1 |
|  | x1 |  |  | = | 1 | x2 = 3/2 |

Вычислим значение функции F в точке A (1,3/2).

F (A) = 2 \* 1 + 2 \* 3/2 = 5

 Большие картинки

**Ответ:**

x1 = 1

x2 = 3/2

F min = 5

Замечание: если возникли сомнения, что функция F достигает своего минимума в точке А, необходимо найти значение функции в интересующей точке и сравнить с F(A).